مسائل حسابية في الهندسة

أ. ضحى عوضي

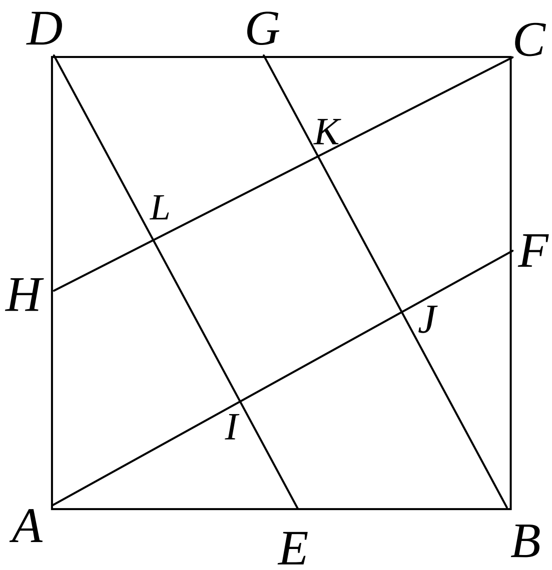
في هذا المقال مجموعة من المسائل الحسابية الجميلة في الهندسة التي من الممكن تعليمها في المرحلتين الإعدادية والثانوية. أعطي إرشادات وطريقة الحل للمسائل الأربع الأولى وأترك المسألتين الأخيرتين للقارئ .

مسألة 1: $ABCD$ هو مربع، النقاط H,G,F,E هي منتصفات أضلاعه.

أ. أثبت أنَّ الشكل الرباعي $I\ J\ K\ L$ هو مربع.

ب. احسب النسبة بين مساحة المربع $I\ J\ K\ L$ ومساحة المربع $ABCD$.

ت. جد النسبة بين مساحة المثلث CKG ومساحة المربع $ABCD$.

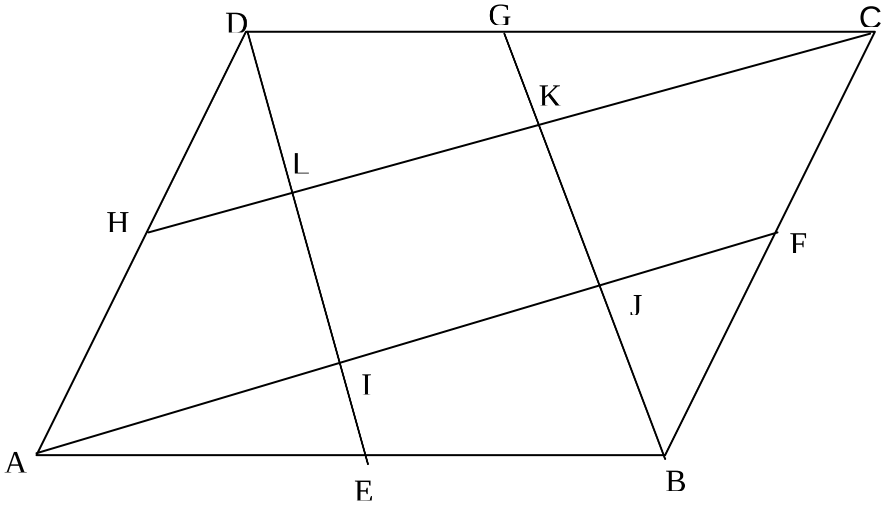


حل المسألة: تساؤلات

1. لماذا HC يوازي ويساوي AF؟ (جواب: بما أنَّ CF يساوي ويوازي AH فإن الشكل الرباعي $AFCH$ هو متوازي أضلاع. لذلك فإنّ HC يوازي ويساوي AF.
2. المثلثات الأربعة BCG و CDH و DAE و ABF متطابقة ؟ لماذا (متطابقة حسب ض.ز.ض).

3. لمـــاذا $\measuredangle CKG = 90^\circ$ ؟ لأنَّ $\measuredangle CBG + \measuredangle CGB = 90^\circ$ وَ $\measuredangle CBG = \measuredangle HCD$ ، لــذلك فإنَّ $\measuredangle CKG = 90^\circ$.
4. المثلثات الأربعة CKG وَ DLH وَ AIE وَ BJF متطابقة (حسب ز.ض.ز).
5. كـل واحـد مـن المسـتقيمات CH وَ DE وَ AF وَ BG ينقسـم بواسـطة نقـاط التقـاطع بالنسبة 2:2:1 (مثلاً : $BJ : JK : KG = 2:2:1$).
6. إذا كــان a طــول ضــلع المربــع $ABCD$ فــإنَّ $BG = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ وكــذلك فــإن $KJ = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. (حسب نظرية فيثاغورس).
7. مساحة المربع $IJKL$ تساوي $\frac{1}{5}a^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)^2$.

مسألة 2



$ABCD$ هو متوازي أضلاع. النقـاط H, G, F, E هـي منتصـفات أضـلاع متـوازي الأضـلاع. نوصـل كـل رأس مـن رؤوس متـوازي الأضـلاع مـع منتصـف الضـلع المقابـل (كمـا تلاحـظ فـي الشـكل). بـرهن أنَّ الشـكل الربـاعي $I\ J\ K\ L$ هـو متـوازي أضـلاع وأنَّ مسـاحته = $\frac{1}{5}$ مسـاحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

مراحل:

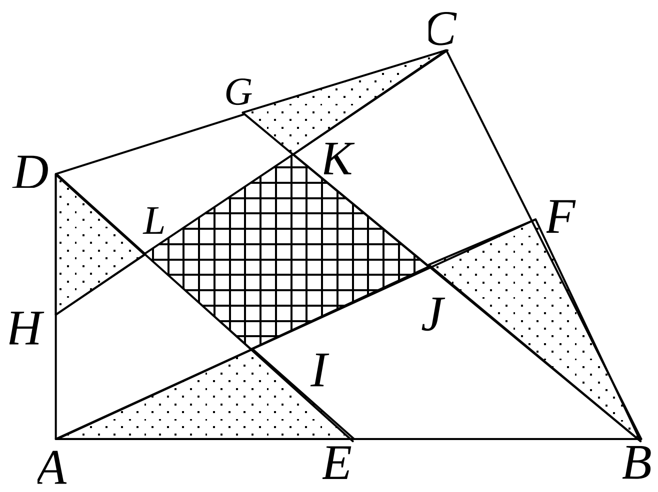
- ✓ برهن أنَّ DE يوازي ويساوي GB.
- ✓ برهن أنَّ CH يوازي ويساوي AF.

- ✓ استنتج أن LI يوازي KJ وأنَّ LK يوازي IJ.
- ✓ استنتج أن $CK = LK$ وأنَّ $GK = \frac{1}{2}DL$ وأنَّ $BJ = JK$.
- ✓ استنتج أن: $S_{CGK} = \frac{1}{20}S_{ABCD}$
- ✓ استنتج أن المثلثين CGK وَ AEI متطابقات.
- ✓ وأن المثلثات الأربعة ذات مساحات متساوية.
- ✓ ثم برهن أن مجموع مساحات المثلثات الأربعة يساوي مساحة الشكل $I\ J\ K\ L$.

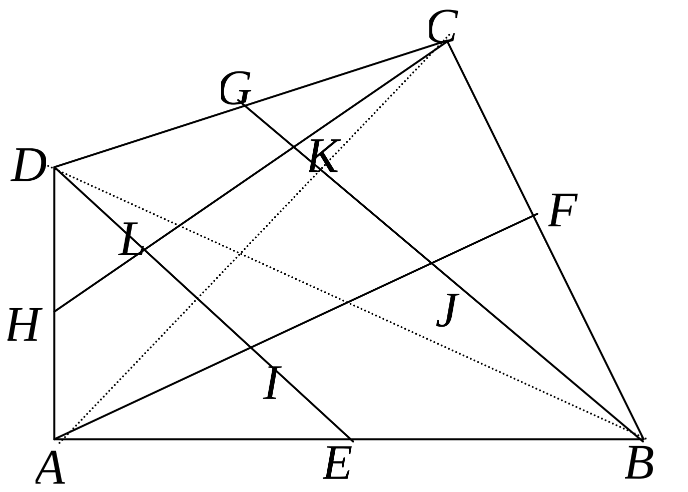
مسألة 3

$ABCD$ شكل رباعي. نعين منتصفات أضلاعه H, G, F, E. نوصل كل رأس من رؤوسه مع منتصف الضلع المقابل (كما تلاحظ في الشكل).

برهن أن: $S_{AIE} + S_{BFJ} + S_{CKG} + S_{DLH} = S_{IJKL}$



برهان:



نتذكّر أنّ المتوسط في المثلث يقسم المثلث إلى مثلثين متساويين بالمساحة. لذلك فعندما نمدّ القطر DB نلاحظ أنّ BG يقسم المثلث DBC إلى مثلثين متساويين بالمساحة ، أي أنّ $S_{BCG} = S_{BDG}$. نلاحظ أيضاً أنّ DE يقسم المثلث DBA إلى مثلثين متساويين بالمساحة، أي أنّ $S_{ADE} = S_{DEB}$.

لذلك فإنّ $S_{ADE} + S_{BCG} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

عندما نمد القطر الثاني AC فنستنتج بنفس الطريقة أنّ $S_{HDC} + S_{AFB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

لذلك فإنّ : $S_{HDC} + S_{AFB} + S_{ADE} + S_{BCG} = S_{ABCD}$.

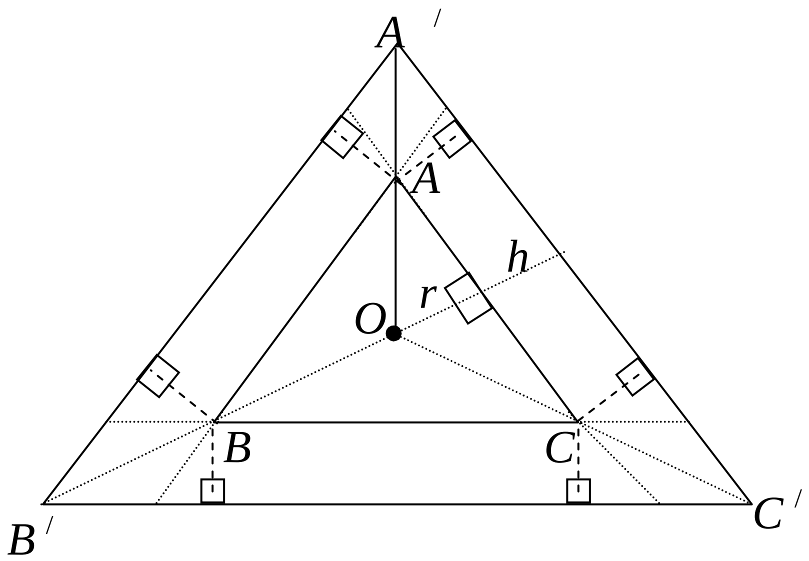
لكن عند النظر إلى الشكل الأوّل نلاحظ أنّ هذا المجموع يساوي مساحة الشكل الرباعي الأصلي بدون الشكل الرباعي الداخلي لكن المثلثات الأربعة DLH , CKG , BFJ , AIE فإنّها تغطى مرتين.

لذلك فإنّ :

$$S_{ABCD} = S_{HDC} + S_{AFB} + S_{ADE} + S_{BCG} =$$
$$S_{ABCD} + S_{AIE} + S_{BFJ} + S_{CKG} + S_{DLH} - S_{IJKL}$$

لذلك فإنّ : $S_{AIE} + S_{BFJ} + S_{CKG} + S_{DLH} = S_{IJKL}$.

مسألة 4



معطى مثلث ABC، نرسم مستقيمات موازية لأضلاعه تبعد بنفس البعد h عن أضلاعه من الخارج. (كما تلاحظ في الشكل). ينتج بذلك المثلث $A^{/}B^{/}C^{/}$ الذي أضلاعه تقع على هذه المستقيمات الموازية التي رسمناها.

ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين ABC **و** $A^{/}B^{/}C^{/}$ ؟

حل: من السهل التأكّد من أنَّ النقاط $A^{/}B^{/}C^{/}$، تقع على منصفات زوايا المثلث ABC. (لاحظ الشكل. تذكر: المحل الهندسي لجميع النقاط في المستوي التي تبعد بنفس البعد عن ضلعي زاوية هو منصف الزاوية).

بما أن أضلاع المثلث $A^{/}B^{/}C^{/}$ توازي على التناظر أضلاع المثلث ABC فأنَّ المثلثين متشابهان. نفرض أن O هي نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث ABC (وهي بالتأكيد نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث $A^{/}B^{/}C^{/}$).

نرمز بـ r لنصف قطر الدائرة المحصورة داخل المثلث ABC وهو يساوي بُعد النقطة O عن كل واحد من أضلاع المثلث ABC.

لذلك فإن $r+h$ يساوي بعد O عن كل واحد من أضلاع المثلث $A^{/}B^{/}C^{/}$. كما نعلم فإن النسبة أطوال أضلاع مثلثين متشابهين تساوي النسبة بين ارتفاعاتهما.

لذلك فإن النسبة بين أطوال أضلاع ABC إلى أطوال أضلاع $A^{/}B^{/}C^{/}$ تساوي $r:r+h$

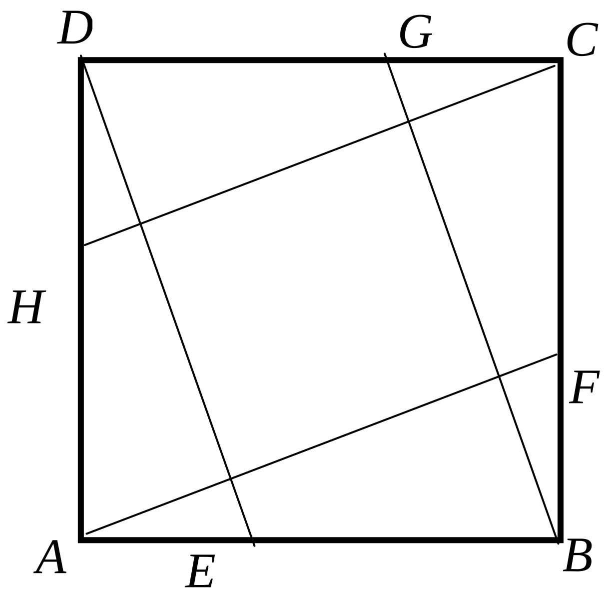
(انظر في المثلثين AOB وَ $A^{/}OB^{/}$ فإن : $\frac{r}{r+h}=\frac{OA}{OA^{/}}=\frac{OC}{OC^{/}}=\frac{AC}{A^{/}C^{/}}$.

بما أنّ النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربّع النسبة بين أضلاعهما لذلك فإنّ:

$$S_{(A'B'C')} = \left(\frac{r+h}{r}\right)^2 \cdot S_{(ABC)}$$

أترك المسألتين الآتيتين للقارئ:

مسألة 5: في الشكل $ABCD$ هو مربع، كل واحد من النقاط H, G, F, E تقسم ضلع المربع الواقعة عليه بالنسبة 1:2 كما ترى في الشكل. نوصل رؤوس المربع مع هذه النقاط يتكون شكل رباعي $I\ J\ K\ L$. جد النسبة بين مساحة الشكل الرباعي الداخلي إلى مساحة المربع الأصلي.



مسألة 6: في الشكل ABCD هو مستطيل، كل واحد من النقاط H, G, F, E تقسم ضلع المستطيل الواقعة عليه بالنسبة 1:2 كما ترى في الشكل. نوصل رؤوس المستطيل مع هذه النقاط

يتكون شكل رباعي IJKL. جد النسبة بين مساحة الشكل الرباعي الداخلي إلى مساحة المستطيل الأصلي.