معادلات خاصّة وطرق حلّ فنيّة

أ. رنا (غنايم) أبو مخ

بعض المعادلات التي نعرضها هنا هي معادلات توجه إلينا أحد الطلاب طالباً حلّها. ارتأينا أن نعرض طرقاً لحلها وحل بعض المعادلات الأخرى ليستفيد القارئ ولنشجعه على التفكير دائماً والبحث عن طرق متنوعة لحل المسائل الرياضية . قد يجد القارئ طرقاً أسهل وأجمل للحل، ويسعدنا تواصل القرّاء معنا.

1. حل المعادلة: $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=16$

المعادلة تكافئ المعادلة:

$$x^2+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=16$$

نعتمد الآن على العلاقة $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ فنحصل على المعادلة المكافئة:

$$\left(\frac{3x}{x+3}-x\right)^2+\frac{6x^2}{x+3}=16$$

وهي تكافئ:

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}=16$$

نعوّض:

$$y=\frac{x^2}{x+3}$$

فنحصل على $y^2+6y=16$

$$\Leftrightarrow y^2+6y-16=0$$

$$(y+8)(y-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2 \quad \Leftrightarrow \text{أو} \quad y=-8$$

$$\frac{x^2}{x+3}=2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+3}=-8 \text{ أو }$$

$$\Leftrightarrow x^2=2x+6 \text{ أو } x^2=-8x-24$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-6=0 \text{ أو } x^2+8x+24=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{2} \text{ أو } x=\frac{-8\pm\sqrt{64-96}}{2}$$

لا يوجد لها حل حقيقي

الجواب: $x=1+\sqrt{7}$ أو $x=1-\sqrt{7}$

ملاحظة: طريقة الحل التي عرضناها تصلح لحل المعادلات ذات الصورة:

$$x^2+\frac{a^2x^2}{(x+a)^2}=m$$

تمرين: حل المعادلات الآتية :

أ. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=8$ ب. $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$

---

2. حل المعادلة: $(x^2-5)^2=x+5$

حــل: نرمــز $u=x^2-5$. بــذلك فــإن المعادلـــة المعطــاة تكــافئ $u^2=x+5$، **لــذلك فإنّ:**

$$\begin{cases} x^2=u+5 \\ u^2=x+5 \end{cases}$$

بالطرح: $x^2-u^2=u-x$

$$(x-u)(x+u)=-(x-u) \Leftrightarrow$$
$$(x-u)(x+u)+(x-u)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-u)(x+u+1)=0 \Leftrightarrow$$

$u=x$ أو $u+x+1=0$

$x^2-5=x$ أو $x^2-5+x+1=0$

$x^2-x-5=0$ أو $x^2+x-4=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ أو $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

ملاحظة: طريقة الحلّ المعروضة تصلح لحل المعادلات ذات الصورة:

$$(x^2-a)^2=x+a$$

تمرين: حل حسب نفس الطريقة المعادلات الآتية:

أ. $(x^2-4)^2=x+4$ ب. $(x^2-\frac{1}{4})^2=x+\frac{1}{4}$

ج. $(x^2-1)^2=x+1$ د. $(x^2-\frac{6}{7})^2=x+\frac{6}{7}$

هـ. $(x^2+2)^2=x-2$ و. $(x^2+\frac{1}{100})^2=x-\frac{1}{100}$

أمعن النظر في النتائج من الفروع السابقة . ما هي التساؤلات التي تثار عندك؟

---

3. حل المعادلة: $\sqrt{17-x^2}=3-\sqrt{x}$

حل: $\sqrt{17-x^2}=3-\sqrt{x}$

$$17-x^2=9-6\sqrt{x}+x \Leftrightarrow$$

$$x^2+x-6\sqrt{x}-8=0 \Leftrightarrow$$

(تحت الشرط $3-\sqrt{x}\geq 0$)

نعوض $t=\sqrt{x}$ فنحصل على المعادلة $t^4+t^2-6t-8=0$.

نلاحظ أنّ $t=-1$ هو أحد حلولها. نحلل للعوامل، المعادلة الأخيرة تكافئ :

$$t^3(t+1)-t^2(t+1)+2t(t+1)-8(t+1)=0$$

$$(t+1)(t^3-t^2+2t-8)=0 \Leftrightarrow$$

$$(t+1)(t^2(t-2)+t(t-2)+4(t-2))=0 \Leftrightarrow$$

$$(t+1)(t-2)(t^2+t+4)=0 \Leftrightarrow$$

$t+1=0 \Leftrightarrow$ أو $t-2=0$ أو $t^2+t+4=0$

$t=-1 \Leftrightarrow$ أو $t=2$

(للمعادلة $t^2+t+4=0$ لا توجد حلول حقيقية).

لكـن: $t=\sqrt{x}\geq 0$ لـذلك فـإنّ $t=2$ هـو الحـل الوحيـد ، لـذلك فـإنّ الحـل هـو $x=4$
($t=\sqrt{x}=-1$ غير ممكن لأن $\sqrt{x}\geq 0$ لكل $x\geq 0$).

الحل الوحيد للمعادلة هو $x=4$.

4. حل المعادلة : $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2-x+1}=5$

حل: نرمز $u=\sqrt{x^2+x+7}$ ، $v=\sqrt{x^2-x+1}$

واضح أن $u+v=5$ وأنّ: $u^2=x^2+x+7$

$$v^2=x^2-x+1$$

لذلك فإنّ $u^2-v^2=2x+6$

لذلك: $(u-v)(u+v)=2x+6 \Leftrightarrow (u-v)\cdot 5=2x+6$

$$\Leftrightarrow \quad u-v=\frac{2x+6}{5}$$

لذلك:

$$\begin{cases} u-v=\dfrac{2x+6}{5} \\ u+v=5 \end{cases}$$

بالجمع:

$$u=\frac{2x+31}{10}\quad \text{لذلك}\quad 2u=\frac{2x+6}{5}+5=\frac{2x+31}{5}$$

لذلك : $\sqrt{x^2+x+7}=\frac{2x+31}{10}$ (بشرط أنّ $2x+31\geq 0$).

$$100(x^2+x+7)=(2x+31)^2 \Leftrightarrow 10\sqrt{x^2+x+7}=2x+31 \Leftrightarrow$$

$100x^2+100x+700=4x^2+124x+961 \Leftrightarrow$ (وَ $x\geq -\frac{31}{2}$).

$$96x^2-24x-261=0 \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{24^2+4\cdot 96\cdot 261}}{192}$$

$$x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{100800}}{192}=\frac{24\pm 10\sqrt{1008}}{192}$$

الحلان يحققان الشرط $x\geq -\frac{31}{2}$

تمرين:

أ. حل المعادلة : $\sqrt{x^2-3x+18}+\sqrt{x^2+5x+11}=9$

ب. حل المعادلة : $\sqrt{x^2+7x+17}+\sqrt{x^2+5x+3}=8$

ج. حل المعادلة : $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=10$

د. حل المعادلة : $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-4x+4}=14$

(ملاحظة: الفرعان (ج) و(د) هما الأسهل!).

---

5. حل المعادلة: $(x^2-7)^2=8x+28$

حـــل: نفـــرض $u=x^2-7$ (والتـــي تكـــافئ $x^2=u+7$) لـــذلك فـــإن المعادلـــة المعطاة تكافئ $u^2=8x+28$. لذلك

$$\begin{cases} 4x^2 = 4u + 28 \\ u^2 = 8x + 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = u + 7 \\ u^2 = 8x + 28 \end{cases}$$

بالطرح:

$$4x^2 - u^2 = 4u - 8x$$
$$(2x - u)(2x + u) = 4(u - 2x)$$
$$(2x - u)(2x + u + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$2x + u + 4 = 0$ او $2x = u$

لكن $u = x^2 - 7$ لذلك:

$$2x = x^2 - 7 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x - 7 = 0$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+28}}{2}$$
$$x = 1 \pm \sqrt{8}$$

أو

$$2x + x^2 - 7 + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$
$$x = -1 \pm 2$$

بشرط أنّ $8x + 28 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3.5$

وهذه الحلول تحقق الشرط.(يفضل الفحص)

$$x_4 = 1 + \sqrt{8} \quad , \quad x_3 = 1 - \sqrt{8} \quad ، \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -3$$