قضيّة حول الأعداد الأولية

صورة العدد n^2+n+11 تمثل صورة عدد أولي لكل $0 \le n \le 9$. عندما نعوض كل عدد من بين الأعداد 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 نحصل في كل مرة على عدد أولي.

n	n^2+n+11
0	11
1	13
2	17
3	23
4	31
5	41
6	53
7	67
8	83
9	101

ولكن عندما نعوض العددين 10 وَ 11 فيها نحصل على عددين مؤلفين (غير أوّليين) :

$$10^2+10+11=11\times 11=11^2 \quad ، \quad 11^2+11+11=11\times 13$$

كذلك الأمر بالنسبة لصورة العدد n^2+n+17 ، فعندما نعوض بدل n كل واحد من الأعداد 0,1,2,3 ....,15 نحصل في كل مَرّه على عدد أولي. (بينما تعويض 16 وَ 17 يعطي عددين مؤلفين).

السؤال الذي يطرح نفسه هو: لأي القيم الأوليّة لِ p تحقق صورة العدد n^2+n+p الصفة، أن تعويض كل عدد من الأعداد $0,1,2,3,\ ......,\ p-2$ يعطي أعداداً أوليّة.

مثلاً عندما $p=2$: ننظر في صورة العدد : n^2+n+2 . عندما نعوض $n=0$ نحصل على 2 وهو عدد أولي. عندما $p=3$: ننظر في صورة العدد : n^2+n+3 . عندما نعوض فيها العددين 0,1 نحصل على العددين 3 ، 5 وهما عددان أوليان. عندما $p=5$: ننظر في صورة العدد : n^2+n+5 . عندما نعوّض الأعداد 0,1,2,3 نحصل على الأعداد الأوليّة: 17,11,7,5.

أثبـت Stark فــي عـام 1967 أن هـذه الصــفة صــحيحة فقـط عنـدما يكـون p أحـد الأعـداد 2,3,5,11,17,41. مــثلاً هــذه الصــفة غيــر صـــحيحة عنـــدما $p=7$: نعــوّض الأعــداد 0,1,2,3,4,5 في صورة العدد n^2+n+7 فنحصل على : 7,9,13,19,27,37

العددان 9 وَ 27 ليسا أوليين .

تمرين : بيّن أن الصفة غير صحيحة لكل واحد من الأعداد 31,37,43.

تمــرين: بـيّن أنــه توجـد مجموعــة لا نهائيــة مـن الأعـداد الطبيعيـة عنـدما نعـوّض أي عـدد منها في التعبير الجبري n^2+n+41 نحصل على عدد مؤلّف.