1. حل معادلات باستعمال التعويض

(1) حل المعادلة $x^2-13x+36=0$.

اعتمد على حل المعادلة السابقة واستعمل التعويض لحل كل واحدة من المعادلات التالية:

أ. $(7x+1)^2-13(7x+1)+36=0$

ب. $(3x-1)^2-13(3x-1)+36=0$

ج. $(\sqrt{x}-1)^2-13(\sqrt{x}-1)+36=0$

د. $(\sqrt{x}+1)^2-13(\sqrt{x}+1)+36=0$

هـ. $x^4-13x^2+36=0$

ز. $(x+1)^4-13(x+1)^2+36=0$

ح. $(5x+1)^4-13(5x+1)^2+36=0$

ط. $(\sqrt{x}-1)^4-13(\sqrt{x}-1)^2+36=0$

ي. $(x^2+2x-1)^4-13(x^2+2x-1)^2+36=0$

<u>حل فرع "ي" من سؤال 1:</u>

$$(x^2+2x-1)^4-13(x^2+2x-1)^2+36=0$$

نعوض: $t=(x^2+2x-1)^2$

تصبح المعادلة : $t^2-13t+36=0$

$\Leftrightarrow$ $t=9$ أو $t=4$

$(x^2+2x-1)^2=9$ أو $(x^2+2x-1)^2=4$

$\Leftrightarrow$

$x^2+2x-1=-2$ أو $x^2+2x-1=2$

$x^2+2x-1=-3$ أو $x^2+2x-1=3$ أو

$\Leftrightarrow$

$x^2+2x+1=0$ أو $x^2+2x-3=0$

$x^2+2x+2=0$ أو $x^2+2x-4=0$ أو

نحل كل معادلة على حده :

$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \qquad \Leftrightarrow (x+3)(x-1) \qquad x=1$ أو $x=-3$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \qquad \Leftrightarrow (x+2)^2 \qquad x=-1$

$\Leftrightarrow x^2+2x-4=0 \qquad \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{20}}{2} \qquad x=-1\pm\sqrt{5}$

$x^2+2x+2=0$ لا يوجد لها حل حقيقي لأن 0 $\Delta=4-8<0$

جميع حلول المعادلة هي : $\{1,\ -3,\ -1,\ -1+\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5}\}$

(2) حل المعادلة $x^2-10x+9=0$.

اعتمد على حل المعادلة السابقة والتعويض لأجل حل كل واحدة من المعادلات التالية:

أ. $(4x+1)^2-10(4x+1)+9=0$

ب. $(x^2+x+1)^2-10(x^2+x+1)+9=0$

ج. $(x^2-2x+3)^2-10(x^2-2x)-21=0$

د. $x^4-10x^2+9=0$

هـ. $(x+2)^4-10(x+2)^2+9=0$

و. $(x+1)^4-10x^2-20x-1=0$

ز. $(x-2)^4-10x^2+40x-31=0$

ح. $(x+3)^4-10x^2-60x-81=0$

ط. $(2x+1)^4-40x^2-40x-1=0$

ي. $(\sqrt{x}+1)^4-10(\sqrt{x}+1)^2+9=0$

ك. $(\sqrt{x}-2)^4-10x+40\sqrt{x}-31=0$

ل. $\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^4-10\left(\frac{2x+1}{4-x}\right)^2+9=0$

م. $\left(\frac{x^2+1}{2x+3}\right)-10\left(\frac{x^2+1}{2x+3}\right)+9=0$

<u>حل فرع ط من سؤال 2:</u>

$$(2x+1)^4-40x^2-40x-1=0$$

$$(2x+1)^4-10(4x^2+4x)-1=0$$
$$(2x+1)^4-10\left[(2x+1)^2-1\right]-1=0$$
$$(2x+1)^4-10(2x+1)^2+9=0$$

نفرض أن $t=(2x+1)^2$

نحصل على المعادلة: $t^2-10t+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=9$ أو $t=1$

$(2x+1)^2=9$ أو $(2x+1)^2=1$

$\Leftrightarrow \quad 2x+1=3$ أو $2x+1=-3$ أو $2x+1=1$ أو $2x+1=-1$

$\Leftrightarrow \quad x=1$ أو $x=-2$ أو $x=0$ أو $x=-1$

مجموعة الحل هي: $\{-2, \ -1, \ 0, \ 1\}$

<u>حل فرع "ي" من سؤال 2:</u>

$$(\sqrt{x}+1)^4-10(\sqrt{x}+1)^2+9=0$$

نفرض أن: $t=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$

نحصل على المعادلة: $t^2-10t+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=9$ أو $t=1$

$(\sqrt{x}+1)^2=9$ أو $(\sqrt{x}+1)^2=1$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}+1=3$ أو $\sqrt{x}+1=-3$ أو $\sqrt{x}+1=1$ أو $\sqrt{x}+1=-1$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}=+2$ أو $\sqrt{x}=-4$ أو $\sqrt{x}=0$ أو $\sqrt{x}=-2$

لكن $\sqrt{x}\geq 0$ لكل $x\geq 0$

لذلك لا يمكن أن يتحقق $\sqrt{x}=-4$ ولا يتحقق $\sqrt{x}=-2$

لذلك $\sqrt{x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=4$

$\sqrt{x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$

مجموعة الحل هي: $\{0, \ 4\}$

(3) حل كل واحدة من المعادلات الآتية (استعن بالتعويض المناسب).

أ. $x^4-5x^2+4=0$

ب. $x^8-5x^4+4=0$

ج. $(3x+1)^4-5(3x+1)^2+4=0$

د. $\left(\frac{7-x}{3+2x}\right)^2-5\left(\frac{7-x}{3+2x}\right)+4=0$

هـ. $\left(x^2-5x+4\right)^2-5\left(x^2-5x+4\right)+4=0$

و. $\left(\frac{x^2+2x-4}{4x+5}\right)^2-5\left(\frac{x^2+2x-4}{4x+5}\right)+4=0$

2. القيمة الصحيحة الأرضية والقيمة الصحيحة السقفية

تعريف1: $\lfloor x \rfloor$ يرمز **للقيمة الصحيحة الأرضّية** للعدد x وهي تساوي أكبر عدد صحيح أصغر من x أو يساويه.

أمثلة:

$\lfloor 5.3 \rfloor = 5$ ، $\lfloor 4.9 \rfloor = 4$ ، $\lfloor 7.99 \rfloor = 7$

$\lfloor 8.09 \rfloor = 8$ ، $\lfloor -1.1 \rfloor = -2$ ، $\lfloor -0.1 \rfloor = -1$

$\lfloor -3.1 \rfloor = -4$ ، $\lfloor 0 \rfloor = 0$ ، $\lfloor -8 \rfloor = -8$

، $\lfloor 8 \rfloor = 8$

سؤال: حل المعادلة $\lfloor x \rfloor = 4$.

حل: $4 \le x < 5$.

سؤال: حل المعادلة $\lfloor x \rfloor = -1$.

حل: $-1 \le x < 0$.

سؤال: حل المعادلة $\lfloor x \rfloor = -3$.

حل: $-3 \le x < -2$.

سؤال: حل المعادلة $\lfloor 3x+4 \rfloor = 10$.

حل: $10 \le 3x+4 < 11$

$\Leftrightarrow \quad 6 \le 3x < 7$

$\Leftrightarrow \quad 2 \le x < \frac{7}{3}$

سؤال: حل المعادلة $\lfloor 4x-7 \rfloor = -2$.

حل: $-2 \le 4x-7 < -1$

$\Leftrightarrow \quad 5 \le 4x < 6$

$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4} \le x < \frac{3}{2}$

سؤال: حل المعادلة $\lfloor x \rfloor = 5.3$.

حل: مجموعة الحل هي المجموعة الفارغة ϕ. لأن $\lfloor x \rfloor$ عدد صحيح

سؤال: حل المتباينة $7 < \lfloor x \rfloor < 9$.

حل: المتباينة تتحقق عندما $\lfloor x \rfloor = 8$ فقط $\Leftrightarrow$ $8 \le x < 9$.

أسئلة:

حل المعادلات الآتية:

(1) $\lfloor x \rfloor = -7$

(2) $\lfloor 4x-1 \rfloor = -11$

(3) $\lfloor x^2 \rfloor = 4$

(4) $\lfloor 3x-8 \rfloor = 15$

(5) $\lfloor 5-x \rfloor = 0$

(6) $\lfloor x^2-2 \rfloor = 1.7$

(7) $\lfloor -6x-1 \rfloor = -3.2$

(8) $\lfloor x \rfloor = x$

(9) $\lfloor x \rfloor = 2x$

(10) $\lfloor x^2 \rfloor = 4$

حل المتباينات الآتية:

(1) $-5 \le \lfloor x \rfloor < -3$

(2) $1 < \lfloor x \rfloor < 4$

(3) $6 \le \lfloor 7x-2 \rfloor < 9$

(4) $5 \le \lfloor x^2-2 \rfloor \le 8$

تعريف 2: $\lceil x \rceil$ يرمز **للقيمة الصحيحة السقفية** للعدد x وهي تساوي أصغر عدد صحيح أكبر من x أو يساويه.

أمثلة: $\lceil 7.1 \rceil = 8$ ، $\lceil 7.9 \rceil = 8$ ، $\lceil 11.7 \rceil = 12$

$\lceil 0 \rceil = 0$ ، $\lceil 9 \rceil = 9$ ، $\lceil 8.9 \rceil = 9$

$\lceil 9.1 \rceil = 10$ ، $\lceil -1 \rceil = -1$ ، $\lceil -1.1 \rceil = -1$

$\lceil -2.3 \rceil = -2$ ، $\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = 0$

سؤال: حل المعادلة $\lceil x \rceil = 2$

حل: $1 < x \le 2$

سؤال: حل المعادلة $\lceil x \rceil = 8$

حل: $7 < x \le 8$

سؤال: حل المعادلة $\lceil x \rceil = -1$

حل: $-2 < x \le -1$

سؤال: حل المعادلة $\lceil 3x+2 \rceil = 8$

حل:

$$\begin{aligned} & 7 < 3x+2 \le 8 \\ \Leftrightarrow\ & 5 < 3x \le 6 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5}{3} < x \le 2 \end{aligned}$$

سؤال: حل المعادلة $\lceil 4x-1 \rceil = -5$

حل:

$$\begin{aligned} & -6 < 4x-1 \le -5 \\ \Leftrightarrow\ & -5 < 4x \le -4 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{5}{4} < x \le -1 \end{aligned}$$

سؤال: حل المعادلة $\lceil x \rceil = -3.1$. الجواب: الحل= المجموعة الفارغة ϕ.

لأن $\lceil x \rceil$ يجب أن يكون عدداً صحيحاً.

أسئلة:

حل المعادلات الآتية:

(1) $\lceil 4x-1 \rceil = -8$

(2) $\lceil 5x+8 \rceil = 11$

(3) $\left| x^2 - 4 \right| = 12$

(4) $\lceil 3x+1 \rceil = -7\dfrac{1}{2}$

(5) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$

(6) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$

حل المتباينات:

(1) $10 < \lceil x \rceil \le 13$

(2) $14 < \lceil 3x+8 \rceil \le 16$

(3) $\lceil x \rceil > \lfloor x \rfloor$

(4) $7 < \left| x^2 \right| \le 10$