□مسألة في الاستقراء الرياضي

د. علي عثمان

يبدأ المقال (الدرس) بمتباينة بسيطة، نعتمد عليها لإيجاد متباينات أصعب. نتوقع صواب التعميم ونبرهن على صوابه بواسطة الاستقراء الرياضي. نتوقع أمراً آخر ونجد صعوبة في برهانه، فنجد الخلاص باستخدام حساب التفاضل. هذا مثال لدرس يتمّ تعليمه حسب طريقة الاكتشاف، يشعر الطالب بحاجته لمعرفة الاستقراء الرياضي، ويعرف أنّها أحياناً غير مجديّة فلا بدّ من استعمال طريقة أخرى للبرهان فيجد أن حساب التفاضل يسعفه.

نلاحظ:

$(x-y)^2 \geq 0$ لكل x و y يحدث التساوي إذا وفقط إذا x=y

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy$$

$$2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$$

$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$ **متباينة (1)**

نستبدل x بـ x^2 و y بـ y^2:

$$x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+y)^2\right]^2 = \frac{1}{2^3}\cdot(x+y)^4$$

نستبدل x بـ x^2 و y بـ y^2:

$$x^8 + y^8 \geq \frac{1}{2^3}(x^2+y^2)^4 \geq \frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{2}(x+y)^2\right]^4 = \frac{1}{2^7}\cdot(x+y)^8$$

نستبدل x بـ x^2 و y بـ y^2:

$$x^{16} + y^{16} \geq \frac{1}{2^7}(x^2+y^2)^8 \geq \frac{1}{2^7}\left[\frac{1}{2}(x+y)^2\right]^8 = \frac{1}{2^{15}}\cdot(x+y)^{16}$$

نتوقع:

$$x^{2^n}+y^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^n-1}}\cdot(x+y)^{2^n}$$

لكل n طبيعي وأن التساوي يحدث إذا وفقط إذا x=y.

نبرهن الان صحة التوقع بالاستقراء الرياضي:

عندما n=1 المتباينة هي $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$ وهي المتباينة الاولى التي حصلنا عليها

نفرض صدق التوقع لـ n ونبرهنه لـ n+1. وفعلاً:

$$x^{2^{n+1}}+y^{2^{n+1}} = (x^{2^n})^2+(y^{2^n})^2 \geq \frac{1}{2}\left(x^{2^n}+y^{2^n}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{2^n-1}}(x+y)^{2^n}\right]^2 =$$

حسب الفرض

حسب المتباينة (1)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2(2^n-1)}}\cdot(x+y)^{2\cdot 2^n} = \frac{1}{2^{2^{n+1}}-1}\cdot(x+y)^{2^{n+1}}$$

فالتوقع صحيح لـ n+1. لذلك فإن المتباينة صحيحة لكل n طبيعي. وكذلك فإن حالة التساوي تحدث $\Leftrightarrow$ x=y.

عندما نحاول برهان القضية ${}^{n}+y^{n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}\cdot(x+y)^{n}$ لكل n طبيعي اكبر من 1 بالاستقراء الرياضي نواجه صعوبة كبيرة. ولو استطعنا برهانها، قد تجد سائلاً يسأل: وهل القضية صحيحة لكل m حقيقي أكبر من 1؟

وعليه نبرهن الآن:

تعميم: لكل m>1 يتحقق أن ${}^{m}+y^{m} \geq \frac{1}{2^{m-1}}\cdot(x+y)^{m}$

لكل x و y موجبين، ويحدث التساوي إذا وفقط إذا x=y.

برهان: نعرض هنا برهاناً باستعمال حساب التفاضل وهو برهان عام ويناسب كل m>1 حقيقي.

المتباينة المذكورة تكافئ $x^m + y^m - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot (x+y)^m \geq 0$

عندما y=0 فإن المتباينة تكافئ $x^m \geq \frac{1}{2^{m-1}} \cdot x^m$ وهذا صحيح كون $x \geq 0$ وَ $1 < \frac{1}{2^{m-1}}$. والمساواة تتحقق فقط عندما x=0.

نفرض الآن أن y>0 .المتباينة المذكورة تكافئ:

$$y^m \cdot \left(\left(\frac{x}{y}\right)^m + 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \left(\frac{x}{y} + 1\right)^m\right) \geq 0$$

وهي تكافئ:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m + 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \left(\frac{x}{y} + 1\right)^m \geq 0$$

نعوض $\mathbf{t} = \frac{x}{y}$. فالمتباينة تكافئ:

$$t^m + 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot (t+1)^m \geq 0$$

نرمز : $\mathrm{f(t)} = t^m + 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot (t+1)^m$.

نبحث الدالة f(t) ونبرهن أن $\mathrm{f(t)} \geq 0$ لكل t. بعد ذلك نفحص حالة المساواة:

$$\mathrm{f'(t)} = \mathrm{mt^{m-1}} - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot m \cdot (t+1)^{m-1}$$

$$\mathrm{f'(t)} = 0$$

$$(2\mathrm{t})^{m-1} = (t+1)^{m-1}$$

$$2\mathrm{t} = t + 1$$

$t = 1$ (انتبه t>0).

$t_0 = 1$ هي نقطة مشبوهة، وهي وحيدة.

$$\mathrm{f}''(\mathrm{t}) = \mathrm{m}(\mathrm{m}-1)\mathrm{t}^{\mathrm{m}-2} - \frac{m(m-1)}{2^{m-1}} \cdot (t+1)^{m-2}$$

$$\mathrm{f}''(1) = \mathrm{m}(\mathrm{m}-1) - \frac{m(m-1)}{2^{m-1}} \cdot 2^{m-2} \geq \frac{1}{2} m(m-1) > 0$$

لذلك $t_0 = 1$ هي نقطة نهاية صغرى وكونها وحيدة والدالة مستمرة في المجال t>0 فإنها نقطة نهاية صغرى مطلقة.

$$\mathrm{f}(1) = 1 + 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \cdot (2)^m = 0$$

لذلك $\mathrm{f}(\mathrm{t}) \geq \mathrm{f}(1) = 0$ لكل t>0 . أي أن $\mathrm{f}(\mathrm{t}) \geq 0$ لكل t>0 والمساواة عندما t=1. لكن $\mathrm{t} = \frac{x}{y}$.

لذلك فالمساواة تحدث عندما x=y. **وهكذا تم برهان صدق القضية.**

بعد أن تمّ الامر، نلاحظ أن الحل يناسب كل عدد حقيقي يختلف عن العدد 1.

وأن المميز الوحيد هو $\mathrm{f}''(1) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\mathrm{m}-1)$.

كما أسلفنا عندما m>1 يتحقق $\mathrm{f}''(1) > 0$. وحصلنا بالاعتماد عليه على برهان المتباينة عندما m>1.

الان ماذا يكون الوضع عندما $0 < m < 1$، نلاحظ أن في هذه الحاله يتحقق $\mathrm{f}''(1) < 0$.

لذلك t=1 هي نقطة نهاية عظمى وهكذا نحصل على التباين:

$$x^m + y^m \leq \frac{1}{2^{m-1}} \cdot (x+y)^m$$ لكل $0 < m < 1$.

أمثلة

مثال ❶

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\le \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}}\cdot (x+y)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\le \sqrt{2}\cdot \sqrt{x+y}$$

والتساوي إذا وفقط إذا تحقق x=y. (يمكن اثباتها بواسطة تربيع الطرفين، وهي نتيجة مباشرة من متباينة كوشي شيفارتز)

مثال ❷

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\le \frac{1}{2^{-\frac{2}{3}}}\cdot (x+y)^{\frac{1}{3}}$$
$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\le \sqrt[3]{4}\cdot \sqrt[3]{x+y}$$

ماذا يكون وضع التباين عندما m<0؟

$f''(1)=\frac{m(m-1)}{2}$ عندما m<0 فإن f''(1)>0. أي أن $t_0=1$ هي نقطة نهاية صغرى. لذلك فالتباين يبقى على حاله. أي أن:

$x^m+y^m\ge \frac{1}{2^{m-1}}\cdot (x+y)^m$ لكل m<0.

نفحص ذلك عندما m=-1:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{1}{2^{-2}}\cdot (x+y)^{-1}$$
$$\frac{x+y}{xy}\ge 4\cdot \frac{1}{x+y}$$
$$(x+y)^2\ge 4xy$$

$$x^2 + y^2 + 2\mathrm{xy} \geq 4xy$$
$$x^2 + y^2 - 2\mathrm{xy} \geq 0$$

$(x - y)^2 \geq 0$ وهي قضية صواب.

قد يسأل سائل وماذا الوضع عندما m=0 (هي الحالة الوحيدة المتبقية):

نقارن بين $\frac{1}{2^{0-1}} \cdot (x + y)^0$ و $x^0 + y^0$.

لاحظ أن الأول يساوي 2 والثاني يساوي 2.

لذلك يحدث تساوي في هذه الحالة لكل x>0 وَ y>0.

<u>نلخص:</u> لكل x وَ y موجبين:

(أ) إذا كان $m>1$ أو $m<0$ فإن $m + y^m \geq \frac{1}{m-1} \cdot (x + y)^m$ وتحدث المساواة إذا وفقط إذا x=y.

(ب) إذا كان $0<m<1$ فإن $m + y^m \leq \frac{1}{m-1} \cdot (x + y)^m$ والمساواة إذا وفقط إذا x=y.

(ت) عندما m=0 أو m=1 فإنّ التساوي هو السائد.

ملاحظة: عندما m=-n وَ $n \geq 1$ طبيعي فإن لكل x>0 وَ y>0 :

$$x^m + y^m \geq \frac{1}{2^{m-1}} \cdot (x + y)^m$$

$$x^{-n} + y^{-n} \geq \frac{1}{2^{-n-1}} \cdot (x + y)^{-n}$$

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} \geq 2^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{x + y}\right)^n$$

$$\frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq 2 \cdot \left(\frac{2}{x + y}\right)^n$$

$$(x^n + y^n)(x + y)^n \geq 2 \cdot (2xy)^n$$

والتساوي يحدث عندما x=y.

مثلاً: n=2:

$$(x^2+y^2)(x+y)^2 \geq 2\cdot(2xy)^2$$

نبرهنها مباشرة (في المرحلة الاعدادية):

$$(x^2+y^2)(x+y)^2 \geq \frac{1}{2}\cdot(x+y)^2\cdot(x+y)^2 = \frac{1}{2}((x+y)^2)^2 \geq \frac{1}{2}\cdot(4xy)^2 = \frac{1}{2}\cdot 16x^2y^2$$
$$= 8x^2y^2$$