مجموع مربعين

(كتبها د. علي عثمان- في مجلة ومضات في الرياضيات العدد العاشر2014 (صفحة17-19))

لاحظ أن:

$$5 = 1^2 + 2^2$$
$$13 = 2^2 + 3^2$$
$$17 = 1^2 + 4^2$$
$$29 = 2^2 + 5^2$$
$$37 = 1^2 + 6^2$$
$$41 = 4^2 + 5^2$$
$$53 = 2^2 + 7^2$$

عندما تحاول أنَ تجد مربعين تامَين مجموعهما 3,7,11,19,23,31 ....أو 43 فلن تستطيع، لذلك فإنَك تتوقع الآتي:

1. **1.** كل عدد أولي من الصورة $4k+3$ لا يمكن أن يساوي مجموع مربعين تامَين.
2. **2.** كل عدد أولي من الصورة $4k+1$ يساوي مجموع مربعين تامَين (العدد الأولي 2 يساوي مجموع مربعين تامَين $2 = 1^2 + 1^2$).

إذا كان عدد أولي أكبر من 2 يساوي مجموع مربعين تامَين فإن أحد المربعين زوجي والمربع الآخر فردي. فلو كان المربع الأول $(2j)^2$ والمربع الثاني $(2k-1)^2$ فإن $(2j)^2 + (2k-1)^2$ يساوي $4j^2 + 4k^2 - 4k + 1$ أي أنه من مضاعفات العدد 4 زائد 1 (أي أنه من الصورة $4m+1$) وهذا يؤكد صواب الادعاء الأول.

أما القضية (2) التي توقعناها فهي صائبة ومثبتة، لا مجال لوضع برهانها هنا. المقصود هو النظرية الآتية:

كل عدد أولي من الصورة $4k+1$ يساوي مجموع مربعين تامَين

ننتقل الآن لمعرفة الأعداد المؤلفة التي يساوي كل منها مجموع مربعين تامَين.

لاحظ أن:

$5 = 1^2 + 2^2$	$10 = 3^2 + 1^2$
$13 = 2^2 + 3^2$	$26 = 5^2 + 1^2$
$17 = 1^2 + 4^2$	$34 = 5^2 + 3^2$
$29 = 2^2 + 5^2$	$58 = 7^2 + 3^2$
$37 = 1^2 + 6^2$	$74 = 7^2 + 5^2$

ماذا نستنتج؟

إذا كان العدد يساوي مجموع مربعين تامَين فإنَ ضعفي العدد يساوي أيضًا مجموع مربعين تامَين. لماذا؟

إذا كان $a = x^2 + y^2$ فإنَ $2a = (x+y)^2 + (x-y)^2$ ، من السهل استنتاج هذا من قائمة الأمثلة السابقة. ومن السهل تأكيد ذلك جبريًا. أمثلة:

$41 = 4^2 + 5^2$	$82 = 9^2 + 1^2$
$53 = 2^2 + 7^2$	$106 = 9^2 + 5^2$
$101 = 1^2 + 10^2$	$202 = 11^2 + 9^2$

أنظر الآن في قائمة الأمثلة الآتية:

$5=1^2+2^2$	$13=2^2+3^2$	$65=5\times13=7^2+4^2$
$5=1^2+2^2$	$17=1^2+4^2$	$85=5\times17=9^2+2^2$
$13=2^2+3^2$	$17=1^2+4^2$	$221=13\times17=14^2+5^2$
$10=3^2+1^2$	$29=2^2+5^2$	$290=10\times29=17^2+1^2$

نلاحظ أيضًا أن:

$65=1^2+8^2$ وَ $85=7^2+6^2$ وَ $221=10^2+11^2$ وَ $290=13^2+11^2$

من الأمثلة نستطيع أن **نتوقع** ما يلي:

اذا كان العددان كل منهما يساوي مجموع مربعين فإن حاصل ضربهما يساوي مجموع مربعين.

وعند ملاحظة عميقة للأمثلة السابقة نستطيع الكشف عن طريقة لإيجاد مجموع المربعين:

في المثال: $5=1^2+2^2$ وَ $13=2^2+3^2$ وَ $65=7^2+4^2$

نستطيع أن نلاحظ أن : $7=2\times2+3\times1$ وَ $4=3\times2-2\times1$

وفي المثال: $13=2^2+3^2$ وَ $29=2^2+5^2$ وَ $377=13\times29=19^2+4^2$. تلاحظ أن: $19=2\times2+5\times3$ و $4=5\times2-3\times2$. لاحــظ أيضــاً أن: $377=13\times29=16^2+11^2$. لاحــظ أنّ: $11=5\times3-2\times2$ و $16=5\times2+3\times2$.

لذلك بإمكاننا توقع الطريقة لإيجاد مربعين مجموعهما . اكتشف الطريقة، واعتمد عليها لإيجاد مربعين مجموعهما يساوي العدد المعطى في كل بند (**جد حلين لكل بند**):

أ. 221 (أحد قواسمه 13) **ب.** 493 (احد قواسمه 17) **ج.** 1073 (أحد قواسمه 29) **د.** 130 **ه.** 1105

اكتشاف الطريقة:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=$$
$$a^2c^2+b^2d^2+2acbd+a^2d^2+b^2c^2-2acbd=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$$

لذلك فإن: $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2$

لاحظ أيضاً:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=$$
$$a^2c^2+b^2d^2-2acbd+a^2d^2+b^2c^2+2acbd=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2$$

لذلك فإن: $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2$