المجسمات الأفلاطونية

(كتبها د. علي عثمان- في مجلة ومضات في الرياضيات العدد العاشر2014 (صفحة20-24))

مجسّم منتظم هو مجسّم سطوحه مضلعات منتظمة. المجسّمات المنتظمة تسمى مجسّمات أفلاطونية. أعرض هنا طريقة لإيجاد جميع المجسّمات الأفلاطونية.

ليكن n عدد الرؤوس، j عدد السطوح، k عدد أضلاع كل سطح = عدد رؤوس كل سطح. m= عدد الأضلاع التي تلتقي في كل رأس. نفرض أن جميع السطوح هي مضلعات منتظمة.

من المعطى: عدد أضلاع المجسّم= $\frac{1}{2}kj$ وهو يساوي $\frac{1}{2}mn$. لذلك: $j=\frac{mn}{k} \Leftrightarrow mn=kj$

واضح أن عدد الأضلاع التي تلتقي في الرأس يساوي عدد السطوح التي تلتقي في الرأس=m.مجموع زوايا السطوح حول كل رأس يجب أن يكون $< 360^\circ$.

بما أن عدد أضلاع كل سطح هو k لذلك فإن مقدار كل زاوية من زوايا السطوح تساوي

$$\frac{180^\circ(k-2)}{k}$$

مجموع زوايا السطوح حول كل رأس = $m\times\frac{180^\circ(k-2)}{k}$

يتحقق أن: $180^\circ\times m\times\frac{(k-2)}{k}<360^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m(k-2)}{k}<2$

$$m<2+\frac{4}{k-2} \Leftrightarrow m(k-2)<2\mathrm{k}$$

ننوه إلى أن $k\geq 3$. نذكر نظرية أويلر $v-e+f=2$

(v=عدد الرؤوس، e=عدد الأضلاع، f عدد السطوح). أي أن:

$$n+k=\frac{1}{2}mn+2 \quad \Leftrightarrow \quad n-\frac{1}{2}mn+j=2$$

$$k\geq 3 \qquad n+j=\frac{1}{2}mn+2 \text{ وَ } m<2+\frac{4}{k-2}$$

نميز بين جميع الحالات الممكنة:

أ. عندما k=3 يكون m<6 أي أن m=3 أو m=4 أو m=5. الإمكانيات في هذه الحالة:

1) k=3 و m=3 ← $n+j=\frac{1}{2}.3n+2 \quad \Leftrightarrow \quad j=\frac{1}{2}n+2$

$\frac{3n}{3}=\frac{1}{2}n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n=4$. $(j=4, n=4, m=3, k=3)$

2) k=3 و m=4 ← n+j=2n+2 ← j=n+2 ↔ $\frac{4n}{3}=n+2 \quad \Leftrightarrow \quad n=6$

(k=3 و m=4 و n=6 و j=8)

3) k=3 و m=3 ← $n+j=\frac{1}{2}.5n+2 \quad \Leftrightarrow \quad j=\frac{3n}{2}+2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{5n}{3}=\frac{3n}{2}+2 \quad \Leftrightarrow \quad 10n=9n+12 \quad \Leftrightarrow \quad n=12 \ , \ j=20$.

$(k=3 \text{ و } m=5 \text{ و } n=12 \text{ و } j=20)$.

(k=3 و m=3 و n=12 و j=20)

ب. عندما k=4 يكون m<4 أي أن m=3.

$$n+j=\frac{1}{2}.3n+2 \quad \Leftrightarrow \quad j=\frac{1}{2}n+2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3n}{4}=\frac{1}{2}+2$$

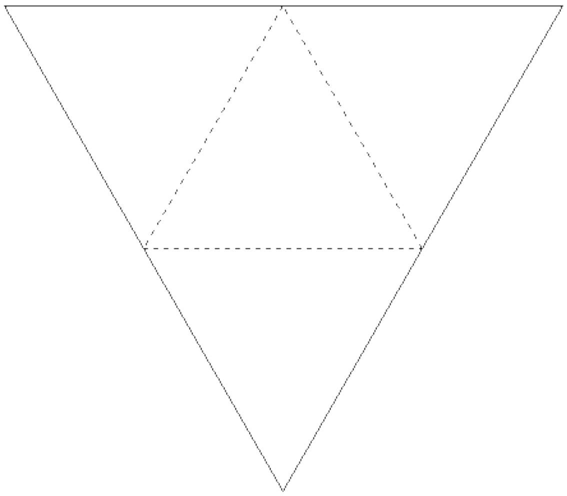
$\Leftrightarrow \quad n=8 \ , \ j=6 \quad (k=4 \text{ و } m=3 \text{ و } n=8 \text{ و } j=6)$

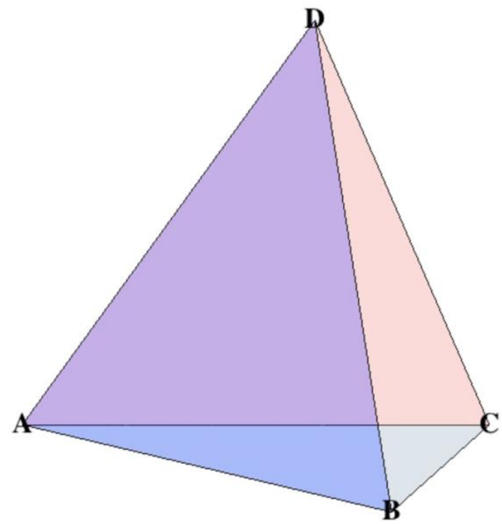
ج. عندما k=5 يكون $m < 3\frac{1}{3}$ أي أن m=3.

j=12 . (k=5 و m=3 و n=20 و j=12).

جميع المجسمات الأفلاطونية:

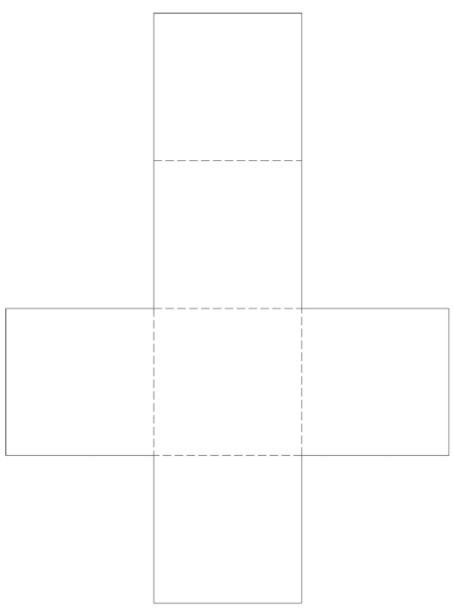
الاسم	عدد السطوح	عدد الرؤوس	m= قيمة كل رأس	k= عدد أضلاع السطح
ذو الثمانية وجوه المنتظم	8	6	4	3
رباعي الوجوه المنتظم	4	4	3	3
ذو العشرين وجهًا المنتظم	20	12	5	3
المكعّب	6	8	3	4
ذو الاثني عشر وجهًا المنتظم	12	20	3	5

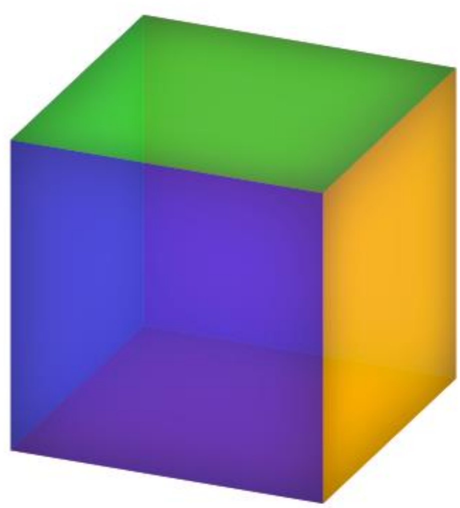




رباعي الوجوه المنتظم

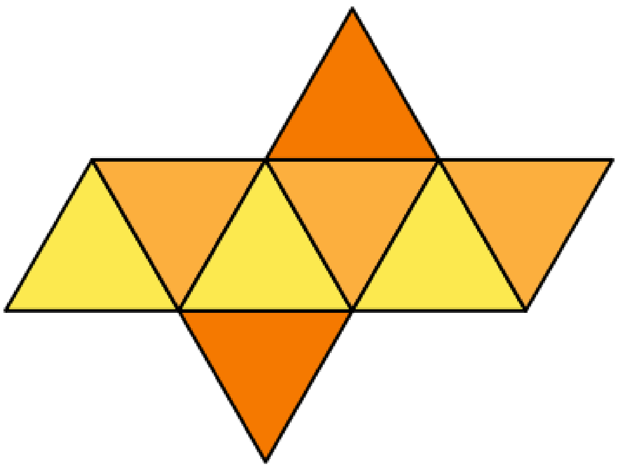
المكعب:

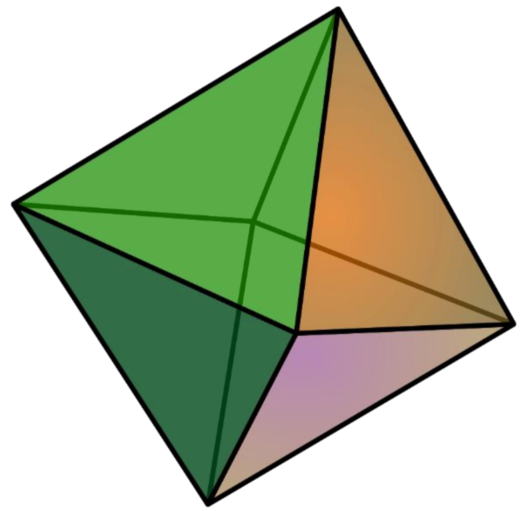




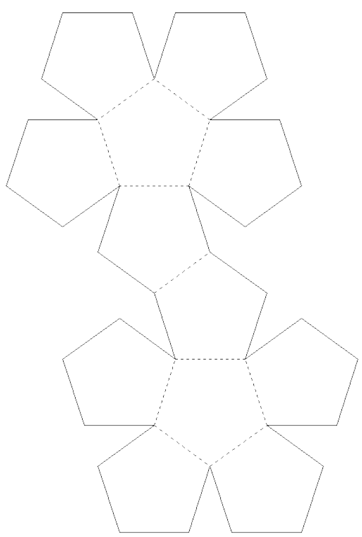
المكعّب

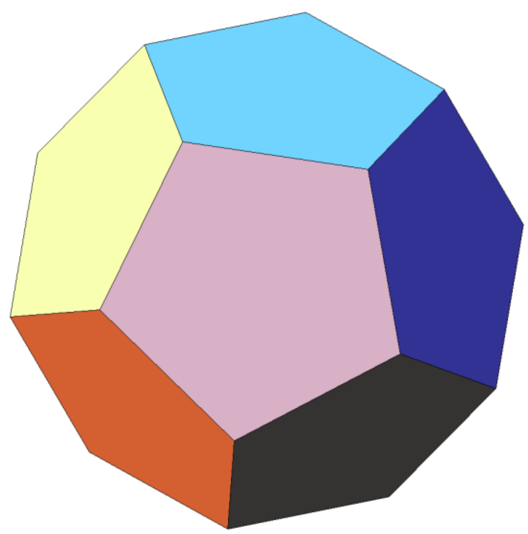
ثماني الوجوه المتنظم:





ذو الاثني عشر وجها المنتظم:





ذو العشرين وجها المنتظم: