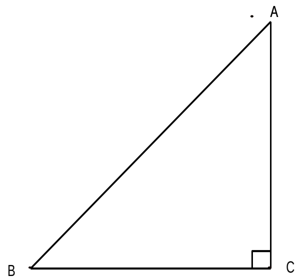
نظرية فيثاغورس

نظرية فيثاغورس: في كل مثلث قائم الزاوية مجموع مربعي الضلعين القائمين يساوي مربّع الوتر.



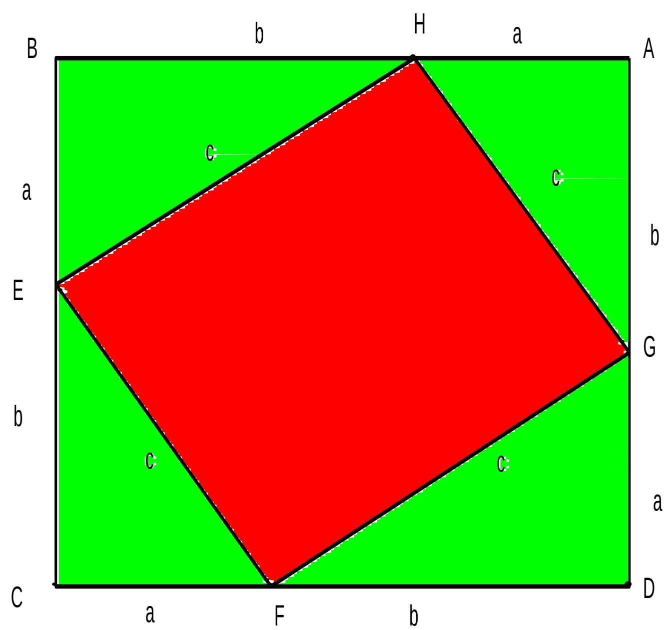
ليكن ABC مثلثاً قائم الزاوية . نفرض أن

$$AB = c \quad , AC = b \quad , \quad BC = a$$

نبرهن أن: $a^2 + b^2 = c^2$

طريقة 1: . نرسم مربعاً طول ضلعه a+b . لتكن E,F,G,H

النقاط التي تقسم أضلاع المربع , كل ضلع لقسمين طول أحدهما a والآخر b .(انظر شكل 2).



من السهل أن نبرهن أن EFGHهو مربع.

عند حساب مساحة المربع ABCD بطريقتين مختلفتين

نتوصل إلى أن:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$

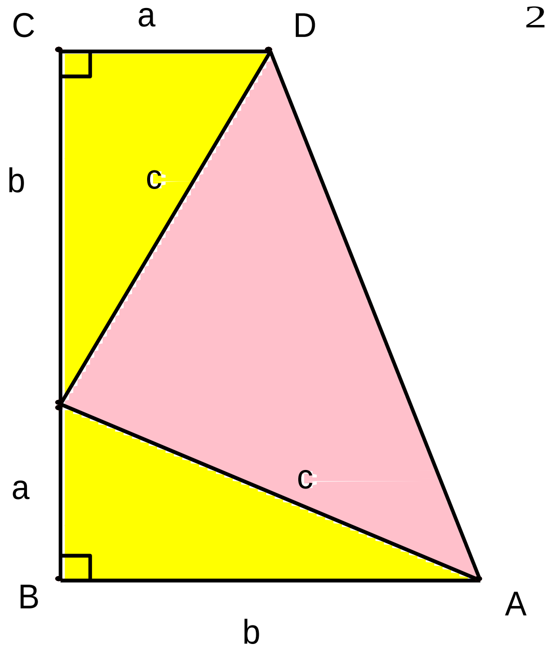
نفك الأقواس فنحصل على:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab = c^2 + 2ab$$

لذلك: $a^2 + b^2 = c^2$ (نتعلّم من هذا وجود نظريات يمكن برهانها أو اكتشافها عند حساب مقدار معين بطريقتين مختلفتين).

طريقة 2:. انظر الشكل. انظر الشكل. نحصل على شبه منحرف ABCD مكوّن من مثلثين مطابقين للمثلث المعطى ، الذي ضلعاه القائمان هما a و b ووتره c, ومثلث ثالث قائم الزاوية ومتساوي الساقين(برهن ذلك). نحسب مساحة شبه المنحرف بطريقتين مختلفتين:

مجموع مساحات المثلثات الثلاثة = مساحة شبه المنحرف حسب القانون



$$\frac{1}{2}\times(a+b)\times(a+b)=\frac{1}{2}\times a\times b+\frac{1}{2}\times a\times b+\frac{1}{2}\times c\times c$$

لذلك: $\frac{1}{2}\times(a+b)^2=ab+\frac{1}{2}c^2$

لذلك: $(a+b)^2=2ab+c^2$

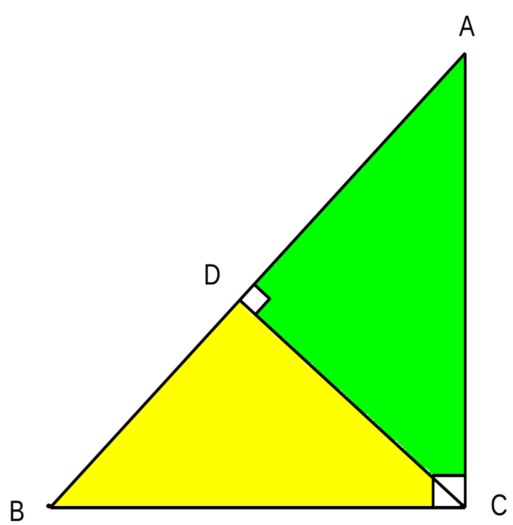
لذلك: $a^2+b^2+2ab=2ab+c^2$

لذلك: $a^2+b^2=c^2$

مسألة في الهندسة وطرق حل مختلفة

معطى مثلث قائم ACB (زاوية C قائمة). CD هو الارتفاع النازل على الوتر . معلوم أنّ $AB=c$ و $BC=a$ و $AC=b$. المطلوب حساب طول الارتفاع CD بدلالة أضلاع المثلث.

طريقة 1. يتحقق التشابه $ADC \sim CDB$ بسبب تساوي الزوايا على التناظر. نرمز: $AD=x$ ، $BD=c-x$ و $CD=h$. بسبب التشابه يتحقق التناسب الآتي:



$\frac{x}{h}=\frac{h}{c-x}=\frac{b}{a}$. من التناسب $\frac{x}{h}=\frac{b}{a}$ ينتج أنّ: $h=\frac{ax}{b}$

ومن التناسب $\frac{h}{c-x}=\frac{b}{a}$ ينتج أنّ : $b(c-x)=ah$

لذلك: $c-x=\frac{ah}{b}$ لذلك فإن $c-\frac{ah}{b}=x$.

وبما أن $h=\frac{ax}{b}$ فإن $h=\frac{a}{b}\left(c-\frac{ah}{b}\right)=\frac{ac}{b}-\frac{a^2}{b^2}h$

لذلك $h+\frac{a^2}{b^2}h=\frac{ac}{b}$ لذلك $h\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=\frac{ac}{b}$

لذلك $h\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)=\frac{ac}{b}$. لكن $a^2+b^2=c^2$ حسب نظرية فيثاغورس.

لذلك فإن: $h\frac{c^2}{b^2}=\frac{ac}{b}$ لذلك فإن: $h=\frac{acb^2}{bc^2}=\frac{ba}{c}$.

أي أنّ : $h=\frac{ba}{c}$.

(إذا أردنا إيجاد x فنستعين بالتناسب $\frac{x}{h}=\frac{b}{a}$ والذي ينتج منه أن $x=\frac{bh}{a}$. لذللك فإن $x=\frac{bh}{a}=\frac{b\frac{ba}{c}}{a}=\frac{b^2}{c}$. ينتج أن $AD=\frac{b^2}{c}$ و $BD=\frac{a^2}{c}$).

طريقة 2: نستعمل نفس الرموز السابقة. حسب نظرية فيثاغورس في المثلث ADC ينتج أن $h^2+x^2=b^2$

ومن نظرية فيثاغورس في المثلث CDB ينتج أن $h^2+(c-x)^2=a^2$. حصلنا على الهيئة

$$\begin{cases} h^2+x^2=b^2 \\ h^2+(c-x)^2=a^2 \end{cases}$$

نطرح فنحصل على $x^2-(c-x)^2=b^2-a^2$. نفك الأقواس فنحصل على $x^2-(c^2-2cx+x^2)=b^2-a^2$ وهي تكافئ المعادلة $2cx-c^2=b^2-a^2$ ، وهي تكافئ $2cx=b^2+c^2-a^2$. علينا الانتباه إلى أن $c^2-a^2=b^2$ (حسب نظرية فيثاغورس). لذلك فإن: $2cx=b^2+b^2=2b^2$. لذلك فإن: $x=\frac{2b^2}{2c}=\frac{b^2}{c}$. نحسب الآن قيمة الارتفاع h حسب المعادلة الأولى:

$$h^2+x^2=b^2$$

$$h^2=b^2-x^2=b^2-\left(\frac{b^2}{c}\right)^2=b^2-\frac{b^4}{c^2}=\frac{b^2c^2-b^4}{c^2}=\frac{b^2\left(c^2-b^2\right)}{c^2}$$

حسب نظرية فيثاغورس فإن $c^2-b^2=a^2$ لذلك فإن $h^2=\frac{b^2\left(c^2-b^2\right)}{c^2}=\frac{b^2a^2}{c^2}$ لذلك فإن: $h=\frac{ba}{c}$.

النتيجة: $h=\frac{ba}{c}$

(انتبه: خلال الحل وجدنا أنّ $AD = x = \frac{b^2}{c}$).

طريقة 3: تشبه طريقة 1 وتعتمد كلياً على التشابه ولكن نتعلم منها على أي المثلثات ننظر. يتحقق التشابه $ADC \sim ACB$ بسبب تساوي الزوايا على التناظر. بسبب التشابه يتحقق التناسب: $\frac{x}{a} = \frac{a}{c} = \frac{h}{b}$.

من التناسب الأول: $\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$ ينتج أن $h = \frac{ab}{c}$.

النتيجة: $h = \frac{ba}{c}$.

طريقة 4: نعتمد على المساحة. نحسب مساحة المثلث ACB بطريقتين:

1) حسب الضلعين القائمين: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$

2) حسب الوتر والارتفاع النازل عليه: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ch$.

لذلك فإن: $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$. لذلك فإن: $ab = ch$ لذلك فإن: $h = \frac{ab}{c}$.