

حساب مجموع الأعداد الطبيعية المتتالية

طلب المعلم من التلاميذ أن يحسبوا مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 10. بعد قليل قال مجد الجواب 55. استغرب التلاميذ من سرعة مجد في الحساب.



سأل رغد: كيف عرفت الجواب بهذه السرعة؟

أجاب مجد: نسجل الأعداد من 1 حتى 10 ونسجل تحتها نفس الأعداد بترتيب معكوس. بحيث يقابل العدد 1 العدد 10 والعدد 2 يقابله العدد 9 كما ترى في الشكل إلى أن نصل إلى العدد 10 الذي يقابله العدد 1، كما تلاحظ في الشكل:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ +\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \end{array}$$

ببساطة نلاحظ أن مجموع كل عددين متقابلين 11. لذلك عندما نجمع الأعداد في السطرين الأول والثاني فإن مجموعها يساوي $11 \times 10 = 110$ لذلك فإن:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 10 = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

سأل رغد: لماذا قسمت على 2؟

أجاب مجد: لأنّ العدد 110 يساوي ضعفي مجموع الأعداد من 1 حتى 10 لأنّ مجموع الأعداد في السطر الثاني مجموع الأعداد في السطر الأول.

لو أردنا أن نحسب مجموع الأعداد من 1 حتى 6 مثلاً :

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\
 +\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \hline
 6+ \quad 5+ \quad 4+ \quad 3+ \quad 2+ \quad 1 \\
 \hline
 7+ \quad 7+ \quad 7+ \quad 7+ \quad 7+ \quad 7
 \end{array}$$

مجموع الأعداد في السطرين يساوي $7 \times 6 = 42$ لأنّ كل عددين متقابلين يساوي 7 . لكن مجموع الأعداد في السطر الثاني يساوي مجموع الأعداد في السطر الأول .

لذلك فإن مجموع الأعداد في كل سطر يساوي $21 = \frac{42}{2}$.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \text{ أي أن}$$



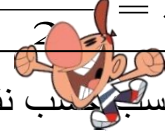
مثال 1: احسب، حسب نفس الفكرة، مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 100 .

حل: نسجّل مجموع الأعداد من 1 حتى 100 في سطر وفي السطر المقابل نسجّل نفس المجموع بترتيب معكوس.

$$\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 \\
+\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
100 + 99 + 98 + 97 + 96 + 95 + \dots + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
\hline
101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101
\end{array}$$

مجموع كل عددين متقابلين 101. لذلك فإن مجموع الأعداد في السطر الثالث يساوي $101 \times 100 = 1100$. هذا المجموع يساوي ضعفي مجموع الأعداد من 1 حتى 100. لذلك فإن مجموع الأعداد من 1 حتى 100 يساوي

$$\frac{1100}{2} = 5050$$



مثال 2: احسب مجموع الأعداد الطبيعية من 15 حتى 22.

حل: نسجل مجموع الأعداد من 15 حتى 22 في سطر وفي السطر المقابل نسجل نفس المجموع بترتيب معكوس.

$$\begin{array}{r}
15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 \\
+\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 \\
\hline
37 + 37 + 37 + 37 + 37 + 37 + 37 + 37
\end{array}$$

مجموع كل عددين متقابلين 37. لذلك فإن مجموع الأعداد في السطر الثالث يساوي $37 \times 8 = 296$ (لأن عدد الأعداد 8). هذا المجموع يساوي ضعفي مجموع الأعداد من 15 حتى 22. لذلك فإن مجموع الأعداد من

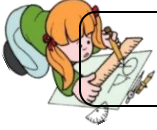
$$15 \text{ حتى } 22 \text{ يساوي } \frac{296}{2} = 148$$





القانون الذي نتوصل إليه هو: مجموع أعداد طبيعية متتالية يساوي

$$(\text{العدد الأول} + \text{العدد الأخير}) \times \text{عدد الأعداد} \div 2$$



مثال: احسب ، حسب القانون، مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 20 .

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 20 = \frac{21 \times 20}{2} = 210$$



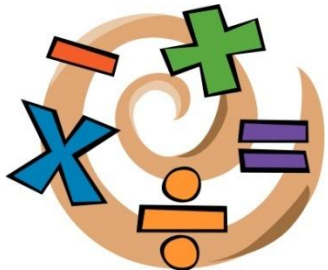
تمارين



1. أ. احسب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 30 .

ب. بكم يزيد مجموع الأعداد الطبيعية من 2 حتى 31 عن مجموع الأعداد من 1 حتى 30 ؟ هل يزيد عنه بـ 1 أم بـ 30 ؟

ج. احسب مجموع الأعداد من 2 حتى 31 حسب القانون، وقارن مع جوابك في فرع (ب).



2. أ. احسب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 15 .

ب. كيف تحسب بسرعة مجموع الأعداد الزوجية من 2 حتى 30 ؟ احسبه.

ج. بكم يقل مجموع الأعداد الفردية من 1 حتى 29 عن مجموع الأعداد الزوجية من 2 حتى 30؟ د. احسب مجموع الأعداد الفردية من 1 حتى 29.

3. أ. احسب، حسب القانون: $1+2+3+4+5+6+7+8+9$

ب. بكم مرة أكبر المجموع $3+6+9+12+15+18+21+24+27$ من المجموع

$1+2+3+4+5+6+7+8+9$ ؟ اشرح طريقة الحل. ثم



احسب مباشرة وتأكد من صدق جوابك.

ج. بكم يقل المجموع $2+5+8+11+14+17+20+23+26$

عن المجموع $3+6+9+12+15+18+21+24+27$ ؟

4. أ. احسب ، حسب القانون: $1+2+3+4+5+6+.....+50$

ب. بكم مرة أكبر المجموع $3+6+9+12+15+18+.....+150$ من

المجموع $1+2+3+4+5+6+.....+50$ ؟

ج. بكم مرة أكبر المجموع $2+4+6+8+10+12+.....+100$ من

المجموع $1+2+3+4+5+6+.....+50$ ؟

د. بكم مرة أكبر المجموع $4+8+12+16+20+24+.....+200$ من

المجموع $1+2+3+4+5+6+.....+50$ ؟

هـ. بكم يقل المجموع $3+7+11+15+19+23+.....+199$ عن

المجموع: $4+8+12+16+20+24+.....+200$ ؟

و. احسب ، حسب النتائج من الفروع السابقة المجموع:

$3+7+11+15+19+23+.....+199$

5. أ. مجموع الأعداد الصحيحة من 1 حتى 20 يساوي 210. بكم يزيد مجموع الأعداد الصحيحة من 21 حتى 40 عن مجموع الأعداد الصحيحة من 1 حتى 20؟ (إذا كان جوابك 210 فهو غير صحيح والصحيح هو 400. لماذا؟).

ب. هل صحيح أن مجموع الأعداد الصحيحة من 1 حتى 40 يساوي 820 بالاعتماد على فرع أ؟ (نعم صحيح. لماذا؟).. بكم يزيد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 حتى 80 عن مجموع الأعداد الصحيحة من 1 حتى 40؟ كم يساوي مجموع الأعداد الصحيحة من 1 حتى 80؟



فكرة أخرى لحساب مجموع أعداد طبيعية متتالية



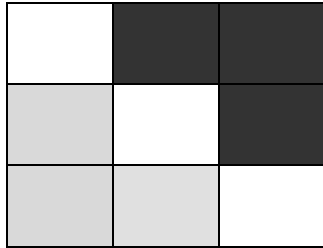
مربع طول ضلعه 3 وحدات:

✓ عدد المربعات الكلي يساوي 9

✓ عدد المربعات الملونة يساوي $9-3=6$

✓ نصفها رمادي يساوي 3

$$1+2 = \frac{9-3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$



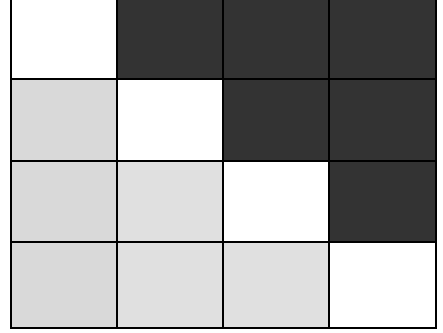
مربع طول ضلعه 4 وحدات:

✓ عدد المربعات الكلي يساوي 16

✓ عدد المربعات الملونة يساوي $16-4=12$

✓ نصفها رمادي يساوي 6

$$1+2+3 = \frac{16-4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$



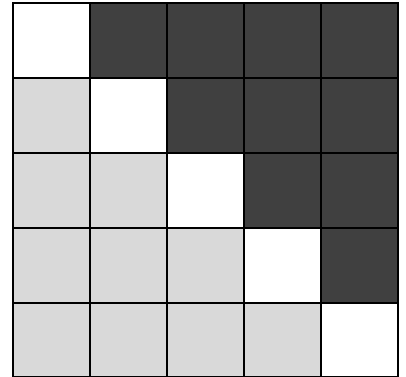
مربع طول ضلعه 5:

✓ عدد المربعات الكلي يساوي $5 \times 5 = 25$

✓ عدد المربعات الملونة بالرمادي يساوي عدد المربعات الملونة بالأسود

يساوي 10 عدد المربعات الملونة بالرمادي

$$1+2+3+4 = 10 = \frac{25-5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$$



مربع طول ضلعه 6:

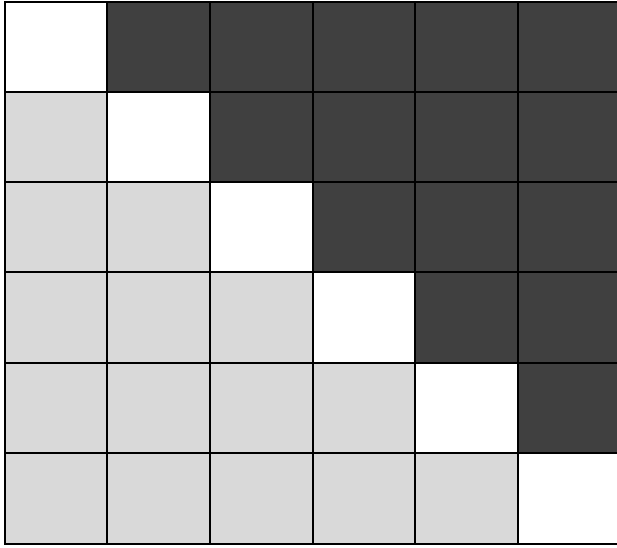
✓ عدد المربعات الكلي يساوي $6 \times 6 = 36$

✓ عدد المربعات الملونة يساوي $36 - 6 = 30$

✓ عدد المربعات الملونة بالرمادي يساوي عدد المربعات الملونة بالأسود

وتساوي 15

✓ عدد المربعات الملونة بالرمادي $\frac{30}{2} = 15$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{36 - 6}{2} = \frac{6 \times 5}{2}$$

نستنتج:

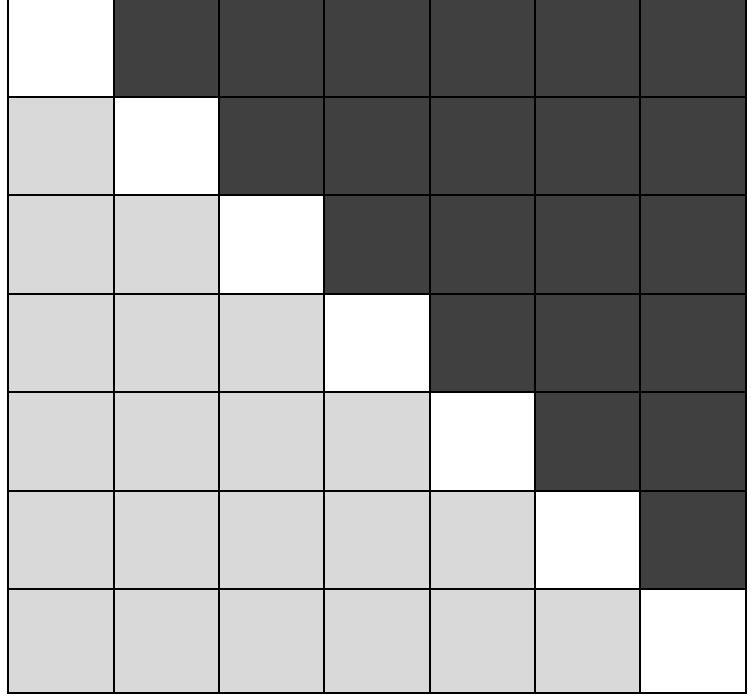
مربع طول ضلعه 7:

✓ ما هو عدد المربعات الكلي؟

✓ ما هو عدد المربعات الملونة؟

✓ ما هو عدد المربعات السوداء؟

✓ ما هو عدد المربعات الرمادية؟



اشرح كيف نستنتج أن



$$1+2+3+\dots+6 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

من الأمثلة السابقة نستنتج: لكي نحسب مجموع الأعداد الطبيعية من 1 حتى 9 نرسم مربعاً طول ضلعه 10 وحدات ونقسمه إلى مربعات صغيرة طول ضلع كل منها وحدة واحدة (نقسمه إلى 100 مربع صغير (أي 10^2 مربعات). المربعات التي في القطر وعددها 10 نتركها بيضاء. نلون بالأسود، مثلاً، المربعات التي فوق القطر ونلون باللون الرمادي المربعات الواقعة تحت القطر. عدد المربعات السوداء = عدد المربعات الرمادية. عدد المربعات الملونة بالأسود أو الرمادي 90، لذلك

$$\text{فعدد المربعات الملونة بالرمادي يساوي } 45 = \frac{90}{2}.$$

وحسب الشكل الذي نرسمه نستنتج أن:

$$1+2+3+\dots+6+7+8+9=45=\frac{10^2-10}{2}$$



1. مربع طول ضلعه 15 وحدة مقسّم إلى 15^2 مربعات صغيرة. نلّون كما في الأمثلة السابقة.



- i.** ما هو عدد المربعات الكلي؟
- ii.** ما هو عدد المربعات الملونة؟
- iii.** ما هو عدد المربعات السوداء؟
- iv.** ما هو عدد المربعات الرمادية؟
- v.** كيف نستنتج منها مجموع الأعداد من 1 حتى 14 .



- 2.** مربع مقسم إلى 101×101 .
- i.** ما هو عدد المربعات الكلي؟
 - ii.** ما هو عدد المربعات الملونة؟
 - iii.** ما هو عدد المربعات السوداء؟
 - iv.** ما هو عدد المربعات الرمادية؟
 - v.** كيف نستنتج منها مجموع الأعداد من 1 حتى 100 ؟