

بطاقتان على إحداها مسجّل الرقم 7 وعلى البطاقة الأخرى الرقم 5 .

$$\boxed{7} \quad \boxed{5}$$

بواسطة تبديل ترتيب البطاقتين يمكن أن نسجّل عددين يتكوّن كلّ منهما من الرقمين 7 و 5 وهما 57 , 75 .

عندما يكون معنا ثلاث بطاقات مسجلة عليها ثلاثة أرقام مختلفة وتختلف عن الصفر، كل رقم على بطاقة ، فيمكن، بواسطة تبديل ترتيب البطاقات، كتابة ستة أعداد مختلفة، بحيث أنّ كلّاً منها مكوّن من الأرقام الثلاثة المسجّلة على البطاقات. مثلاً لو كانت البطاقات:

$$\boxed{7} \quad \boxed{6} \quad \boxed{5}$$

بواسطة البطاقات يمكن أن نسجّل الأعداد: 765 , 756 , 675 , 657 , 567 , 576
كم يساوي مجموع هذه الأعداد الستة؟

نجمع الأعداد جمعاً عمودياً . نسجّل الأعداد بشكل عمودي:

$$\begin{array}{r} 7 \ 6 \ 5 \\ 7 \ 5 \ 6 \\ + \ 6 \ 7 \ 5 \\ \hline 6 \ 5 \ 7 \\ 5 \ 7 \ 6 \\ 5 \ 6 \ 7 \end{array}$$

نلاحظ أنّ مجموع الأرقام الستة التي هي أرقام أحاد يساوي $36 = 2 \times (5 + 6 + 7)$ ، لأنّ كل رقم يُحسب مرتين. كذلك الأمر بالنسبة للأرقام الموجودة في منزلة العشرات فإنّ مجموعها يساوي 36 ، ومجموع الأرقام التي في منزلة الآحاد فإنّ مجموعها يساوي 36 . لذلك فإنّ

مجموع الأعداد الستة يساوي

$$\begin{aligned} & 36 + 36 \times 10 + 36 \times 100 = \\ & 36 \times (1 + 10 + 100) = \\ & 36 \times 111 = 3996 \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ مجموع الأعداد الستة = $111 \times (\text{مجموع الأرقام الثلاثة}) \times 2$

أجب عن الأسئلة الآتية باستعمال نفس فكرة الجمع السابقة.

1. احسب مجموع الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها الأرقام 1 ، 2 ، 3 كل رقم مسجّل على بطاقة.
2. احسب مجموع الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها الأرقام 1 ، 4 ، 5 كل رقم مسجّل على بطاقة.
3. احسب مجموع الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها الأرقام 2 ، 4 ، 6 كل رقم مسجّل على بطاقة.

قصة درس

أثناء شرح المعلم للدرس خطرت على بال أحد التلاميذ، واسمه إياد، الخاطرة الآتية: بالنسبة للمثال الذي فيه الأرقام 5 ، 6 ، 7 . فكّر إياد بشكل مختلف: قال في نفسه، إنّ أصغر هذه الأعداد هو العدد 567 وأكبرها هو العدد 765 . أجمع الأعداد الستة كما تعلمنا لحساب مجموع متواليّة الحسابية، فأجمع العدد الأصغر مع العدد الأكبر وأضرب في نصف عدد الحدود. فحصل على $\frac{6}{2} \times (567 + 765) = 3996$.

حل التلاميذ السؤال الأول، عندما تكون الأرقام 3،2،1 كما علم المعلم وحصلوا على الجواب 1332.

أمّا إياد فكّر بطريقته: أصغر هذه الأعداد هو العدد 123 ، وأكبرها هو العدد 321 . أجمع كما نجمع حدود متواليّة حسابية ، فالجواب هو : $\frac{6}{2} \times (123 + 321) = 1332$. (التلاميذ يحلون بطريقة إياد سعيد جداً، بصمت، يحل بطريقته بهدوء ، وينتظر متى يأتيه العزم الجريء ليعلن عن طريقته...)

وعندما جاء السؤال الثاني الذي فيه الأرقام 1 ، 4 ، 5 حل إياد بسرعة: العدد الأصغر هو 145 والأكبر هو 541 لذلك فإنّ المجموع يساوي $\frac{6}{2} \times (145 + 541) = 2058$. وجلس ينتظر جواب زملائه. كان جواب زملائه 2220 .

اختلطت المشاعر لدى إياد ولاحظ المعلم علامات الاضطراب على وجهه. فسأله المعلم عما يزعجه. فصرّح إياد عن طريقته . فسأله المعلم: وهل الأعداد الستة تكوّن متواليّة حسابية! فقال إياد: لكنني حصلت على جواب صحيح في المثالين الأوّل والثاني. قال: المعلم: لكنك تستعمل قانوناً في غير موضعه. أطلب منك أن تبحث في المسألة الآتية:

متى تحصل على نفس النتيجة حسب الطريقة التي شرحتها لكم وحسب الطريقة التي استعملتها أنت ومتى لا تحصل على نفس النتيجة؟

4. احسب مجموع الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها ثلاثة أرقام مختلفة مجموعها يساوي 18 .

5. احسب مجموع الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها ثلاثة أرقام مختلفة مجموعها يساوي 13 .

6. كتب شخص الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها ثلاثة أرقام مختلفة فحصل على المجموع 5328 . ماذا كانت الأرقام الثلاثة؟

7. كتب شخص الأعداد الستة التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها ثلاثة أرقام مختلفة فحصل على المجموع 1332 . ماذا كانت الأرقام الثلاثة؟

8. اختار شخص ثلاثة أرقام مختلفة وسجل بواسطتها الأعداد الستة الممكنة وجمعها فحصل على 4440 . هل تستطيع أن تعرف بالتأكيد الأرقام التي اختارها الشخص؟ (كم حلاً يوجد؟)

9. اختار شخص ثلاثة أرقام مختلفة وسجل بواسطتها الأعداد الستة الممكنة وجمعها فحصل على 3330 . هل تستطيع أن تعرف بالتأكيد الأرقام التي اختارها الشخص؟ (كم حلاً يوجد؟)

حل: $15 = 2 + 111 \div 3330$ لذلك فإن مجموع الأرقام الثلاثة = 15 . الأرقام الثلاثة مختلفة ومجموعها 15 . الإمكانات هي:

{1,5,9}, {1,6,8}, {2,4,9}, {2,5,8}, {2,6,7}, {3,4,8}, {3,5,7}, {4,5,6}

10. قال شخص أنه اختار ثلاثة أرقام مختلفة وسجل بواسطتها الأعداد الستة الممكنة وجمعها فحصل على 5772 . هل صدق الشخص؟ علل!

11. اكتب جميع الأعداد التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها الأرقام 0، 2، 3 كل رقم مسجل على بطاقة. كم عدداً يوجد؟ واحسب مجموعها.

12. اكتب جميع الأعداد التي يمكن كتابتها باستعمال ثلاث بطاقات مسجلة عليها الأرقام 0 ، 2 ، 3 كل رقم مسجل على بطاقة. كم عدداً يوجد؟ واحسب مجموعها.

السؤال الآن هو: لو كانت لدينا 4 بطاقات واخترنا 4 أرقام مختلفة وسجلنا كلاً منها على بطاقة, فما هو عدد الأعداد ذات أربعة أرقام التي يمكننا بناؤها بواسطتها؟ وكيف نجعلها؟

نختار مثلاً: $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$ $\boxed{1}$

عندما نختار بطاقة ونضعها في منزلة الآلاف تبقى لدينا 3 بطاقات والتي يمكن ترتيبها في 6 إمكانيات مختلفة. لذلك:

- . توجد 6 أعداد رقم آلاف كل منها 4 .
- . توجد 6 أعداد رقم آلاف كل منها 1 .
- . توجد 6 أعداد رقم آلاف كل منها 7 .
- . توجد 6 أعداد رقم آلاف كل منها 8 .

لذلك فإن عدد الأعداد ذات أربعة أرقام التي يمكن بناؤها هو $4 \times 6 = 24$.

كيف نجعلها؟ عندما نرتبها بشكل عمودي (فوق بعضها البعض) وننظر في عمود الآحاد.

نلاحظ أنه يوجد فيه 24 عدداً. فمن الطبيعي أن يظهر فيه كل رقم من الأرقام الأربعة 6 مرات (لأن: $24 \div 4 = 6$) . لذلك فإن مجموع الأرقام الـ 24 الظاهرة في عمود الآحاد $= 120 = 6 \times (1+4+7+8)$. ينطبق الأمر نفسه على عمود العشرات وعمود المئات وعمود الآلاف. لذلك فإن مجموع الأعداد الـ 24 يساوي:

$$\begin{aligned} & 1000 \times 120 + 100 \times 120 + 10 \times 120 + 1 \times 120 \\ & = (1000 + 100 + 10 + 1) \times 120 \\ & = 1111 \times 120 = 133320 \end{aligned}$$

استنتاج

مجموع الأعداد الـ 24 التي يمكن بناؤها بواسطة أربع بطاقات مسجلة عليها أربعة أرقام مختلفة يساوي: $1111 \times (\text{مجموع الأرقام الأربعة}) \times 6$.

تمارين

1. بواسطة تبديل ترتيب البطاقات كتب شخص جميع الأعداد ذات أربعة أرقام الممكنة. كانت البطاقات هي $\boxed{9}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$. كم يساوي مجموع الأعداد الـ 24 التي كتبها الشخص؟

2. اختار شخص أربعة أرقام مختلفة وسجّل بواسطتها الأعداد ألك 24 الممكنة ثم جمعها . قال الشخص أن المجموع الذي حصل عليه هو 66660 . فما هي الأرقام التي اختارها؟ كم حلاً يوجد للمسألة؟

حل: $66660 = 1111 \times (\text{مجموع الأرقام الأربعة}) \times 6$ لذلك فإن :

مجموع الأرقام $= 10 = 66660 \div 6 \div 1111$. للمسألة حل وحيد وهو 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

3. اختار شخص أربعة أرقام مختلفة وسجّل بواسطتها الأعداد ألك 24 الممكنة ثم جمعها . قال الشخص إن المجموع الذي حصل عليه هو 93324 . فما هي الأرقام التي اختارها؟ كم حلاً يوجد للمسألة؟

4. اختار شخص أربعة أرقام مختلفة وسجّل بواسطتها الأعداد ألك 24 الممكنة ثم جمعها . قال الشخص أن المجموع الذي حصل عليه هو 199980 . فما هي الأرقام التي اختارها؟ كم حلاً يوجد للمسألة؟

5. اختار شخص أربعة أرقام مختلفة وسجّل بواسطتها الأعداد ألك 24 الممكنة ثم جمعها . قال الشخص أن المجموع الذي حصل عليه هو 173316 . فما هي الأرقام التي اختارها؟ كم حلاً يوجد للمسألة؟

6. قال شخص أنه اختار أربعة أرقام مختلفة وسجل بواسطتها الأعداد ألك 24 الممكنة وجمعها

فحصل على 226644 . هل صدق الشخص؟ علل!

7. بواسطة تبديل ترتيب البطاقات كتب شخص جميع الأعداد ذات أربعة أرقام الممكنة. كانت البطاقات هي [9] [4] [3] [0]. كم يساوي مجموع الأعداد التي كتبها الشخص؟

حل: يجب أن نلاحظ أن الأعداد التي رقم ألافها 0 هي أعداد ذات ثلاثة أرقام، وعددها 6. يجب حذف هذه الأعداد من مجموعة الأعداد المطلوبة لأن الأعداد المطلوبة هي الأعداد ذات أربعة أرقام. عدد الأعداد المطلوب حساب مجموعها هو $18 = 24 - 6$. لكي نحسب مجموعها نحسب مجموع الأعداد ألك 24 (مع الأعداد الستة التي يقع الصفر في منزلة ألافها) ونطرح منه مجموع الأعداد ألك 6 التي أرقامها [9] [4] [3] . مجموع الأعداد الـ 18 يساوي

$$6 \times (0+3+4+9) \times 1111 - 2 \times (3+4+9) \times 111 = 103104$$

8. بواسطة تبديل ترتيب البطاقات كتب شخص جميع الأعداد ذات أربعة أرقام الممكنة. كانت البطاقات هي [8] [7] [3] [0]. كم يساوي مجموع الأعداد التي كتبها الشخص؟

9. بواسطة تبديل ترتيب البطاقات كتب شخص جميع الأعداد ذات أربعة أرقام الممكنة. كانت البطاقات هي [8] [7] [1] [1]. كم يساوي مجموع الأعداد التي كتبها الشخص؟

حل: لو كانت الأرقام الأربعة مختلفة فإن عدد الإمكانيات المختلفة لترتيب البطاقات يساوي 24. ننظر على البطاقات [8] [7] [A] [1] حيث أن A يختلف عن باقي الأرقام. توجد 24 إمكانية. عندما نسجل بدل A الرقم 1 فإن كل إمكائيتين تتحولان إلى إمكانية واحدة. مثلاً: الإمكائيتان [1][7][1][8] و [A][7][1][8] تتحولان إلى إمكانية واحدة وهي: [1][7][1][8]. نستنتج أن عدد الأعداد الناتجة من تغيير ترتيب البطاقات يساوي $24:2=12$. أما مجموع الأعداد الـ 12 فهو يساوي نصف مجموع الأعداد الـ 24 (فيما لو كانت الأرقام مختلفة) $= 56661 = \frac{1}{2} \times 6 \times (1+1+7+8) \times 1111$

10. بواسطة تبديل ترتيب البطاقات كتب شخص جميع الأعداد ذات أربعة أرقام الممكنة. كانت البطاقات هي [5] [2] [2] [1]. كم يساوي مجموع الأعداد التي كتبها الشخص؟

فكر واجب:

1. معطى ثلاث بطاقات مسجل على كل منها عدد مكوّن من رقمين.

[23] [56] [21]

نكوّن أعداداً بواسطة وضع البطاقات بجانب بعضها . كل عدد نكوّنه هو عدد مكوّن من ستة أرقام. كم عدداً يمكن أن نكوّن وكم يساوي مجموعها؟

2. معطى أربع بطاقات مسجل على كل منها عدد مكوّن من رقمين.

[16] [23] [34] [27]

نكوّن أعداداً بواسطة وضع البطاقات بجانب بعضها . كل عدد نكوّنه هو عدد مكوّن من ثمانية أرقام. كم عدداً يمكن أن نكوّن وكم يساوي مجموعها؟